Universidade da Beira Interior

Departamento de Matemática

Probabilidades e Análise Combinatória

- Uma revisão do ensino secundário -

Ana Cristina de Matos Gonçalves

N.º m3302

Relatório de Estágio para a obtenção do grau de Mestre no Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

2009/2010

Universidade da Beira Interior

Departamento de Matemática

Probabilidades e Análise Combinatória

- Uma revisão do ensino secundário -

Ana Cristina de Matos Gonçalves

N.º m3302

Orientador: Professor Doutor Dário Ferreira

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências Exactas

Universidade da Beira Interior

2009/2010

Resumo

O trabalho começa com uma introdução ao Cálculo das Probabilidades, prosseguindo, num segundo capítulo com o estudo da Análise Combinatória, onde são apresentados alguns padrões de interesse do Triângulo de Pascal.

A última parte do trabalho está reservada para a aplicação do uso da Calculadora nas Probabilidades e Análise Combinatória.

Abstract

The dissertation begins with an introduction to the Calculus of Probability, continuing, in a second chapter, with the study of Combinatorics. Some interesting patterns of Pascals Triangle are presented.

The final section is reserved to implement the use of calculator in Combinatorics and Probability.

A gradecimentos

Ao Orientador *Professor Doutor Dário Ferreira*, pela disponibilidade e apoio manifestado, pelas sugestões, bem como pelo incentivo que me proporcionou ao longo deste trabalho, o que me permitiu a sua realização;

Ao Departamento de Matemática;

À Universidade da Beira Interior;

À minha Família;

À Escola Profissional Agostinho Roseta – Pólo de Castelo Branco;

Aos meus Explicandos e Colegas do Centro de Explicações Professor Mocho;

Aos meus Amigos, não esquecendo o Pedro, pelo estímulo sempre manifestado.

Índice

" A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exactidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

Introdução

O objectivo deste trabalho, sobre o vasto tema que é as Probabilidades, é o de promover um aprofundamento de alguns conceitos de forma clara e organizada.

A motivação para a escolha do tema do relatório de estágio para a obtenção do grau de Mestre no Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, deveu-se ao facto das Probabilidades e a Análise Combinatória serem parte integrante dos currículos do ensino básico e secundário e dos conceitos e metodologias estarem presentes em muitas áreas de investigação.

As probabilidades fornecem conceitos e métodos para estudar fenómenos aleatórios e para interpretar previsões baseadas na incerteza. Este estudo, que pode ser em grande parte experimental, fornece uma base conceptual que capacita para interpretar, de forma crítica, toda a comunicação que utiliza a linguagem das probabilidades, bem como a linguagem estatística. As técnicas de contagem que aqui aparecem como auxiliar do cálculo de probabilidades constituem uma aprendizagem significativa por si só, especialmente se desenvolverem mais as capacidades do raciocínio combinatório e as conexões matemáticas e menos a aplicação das fórmulas. Considera-se ainda que o tema das Probabilidades constitui uma boa oportunidade para a introdução de uma axiomática, uma das formas de organizar uma teoria matemática. Finalmente, qualquer destes assuntos é bom para prosseguir objectivos de trabalho em aspectos da História da Matemática [6], [12].

Tal como qualquer ramo da ciência o estudo das probabilidades começou por se efectuar a nível do quotidiano, com a observação de fenómenos diários e como explicação para muitas situações que ocorriam aleatoriamente, tantas vezes julgadas por desejos de ordem Divina.

Com o passar do tempo e com o surgimento de mentes capazes de ver mais longe, a probabilidade começou a ser tratada como uma questão matemática, e assim foi evoluindo até ao que estudamos hoje em dia.

Deste modo, o surgimento do estudo das probabilidades pode considerar-se em duas fases:

- A "Pré-História" das Probabilidades; e

- O Estudo das Probabilidades como um ramo da Matemática.

Se estudamos as probabilidades como uma teoria, não nos devemos esquecer que a virtude do Cálculo das Probabilidades reside no facto da sua aplicação desde a vida quotidiana até às ciências actuais.

A verdade é que em qualquer ciência o acaso e a incerteza ocupam um lugar importante que é necessário quantificar para minorar a margem de erro.

Quando falamos de ciências económicas e sociais, falamos também de leis que são baseadas muitas vezes na análise de grande quantidade de factos semelhantes, tendo por base o cálculo probabilístico.

Na química quântica, as probabilidades desempenham também um papel muito importante na distribuição de electrões num átomo. A partir do conhecimento da probabilidade de determinado electrão estar em determinado sítio criam-se nuvens electrónicas.

Outro contributo de peso da Teoria das Probabilidades para o mundo moderno reporta-se à Biologia e à Genética, mais propriamente à Hereditariedade, campo em que Gregor Mendel se tornou pioneiro. Este monge austríaco, já no século XIX, iniciou um estudo de hereditariedade, no qual realizava experiências sobre cruzamentos das ervilheiras de cheiro. Sobre isto publicou uma obra ("A Matemática de Hereditariedade"), que marcou uma época de grandes aplicações probabilísticas no campo da Biologia.

Segundo Mendel, os gâmetas juntar-se-iam aleatoriamente, cada um transportando um factor (ou gene) capaz de codificar determinada característica. Para os geneticistas, o gene responsável pelo sexo de uma pessoa seria ou o Y (masculino) ou o X (feminino) e daí tiramos que a probabilidade de uma criança ser do sexo masculino ou feminino seria de 50%. Os gâmetas seriam então como as duas faces da mesma moeda, uma X, outra Y, sendo 0,5 a probabilidade de ocorrência de cada um dos casos.

Também Mendel tirara estas conclusões, mas tomara o cuidado de observar um grande número de indivíduos. A lei estatística do monge era não mais que a Lei dos Grandes Números, a mesma usada no cálculo probabilístico em jogos de dados ou cartas, ou qualquer jogo de azar.

É interessante verificar que mesmo aqui se realizam combinações de genes, de um modo mais simples, através daquilo a que se chama xadrez mendeliano.

Mas é talvez no campo da Estatística que as Probabilidades ganham mais relevo.

Na política por exemplo, consegue-se fazer previsões, relativamente próximas, de qual o candidato vencedor. São projecções adiantadas por órgãos próprios que conduziram inquéritos e entrevistas numa amostra significativa, um conjunto representativo da população em estudo, que depois de tratados, podem dar origem a uma conclusão generalizada dos resultados. Esta baseia-se também num tratamento probabilístico dos dados.

Numa outra análise, é curioso verificar que mesmo a nível militar o cálculo probabilístico assume grande importância. As estratégias de ataque e defesa, principalmente durante o período da 2ª Guerra Mundial, desenvolveram-se muito com base em estrategas e matemáticos cujo plano de batalha recorria diversas vezes ao estudo probabilístico.

Mas as aplicações da Teoria das Probabilidades não se reportam apenas a estes campos.

Na verdade até em Ecologia podemos encontrar as probabilidades como modo de alcançar um outro fim.

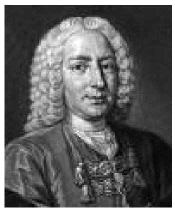
Em suma, podemos dizer que a Teoria das Probabilidades está subjacente a vários campos, não só na Matemática mas nas diferentes ciências.

B reve referência histórica

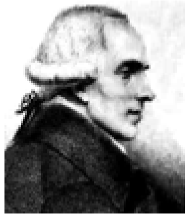
Blaise Pascal (1623-1662) desde muito jovem revelou um extraordinário talento para as Matemáticas. Em 1640, com apenas 17 anos, publicou o *Essay pour les coniques*, onde apresentou aquele que ficou conhecido como teorema de Pascal. Este foi o começo de uma carreira matemática brilhante, que o levou logo de seguida a desenvolver uma máquina de calcular que construiu poucos anos mais tarde. Porém, como matemático, hoje Pascal é provavelmente mais conhecido como um dos criadores do Cálculo das Probabilidades. Em 1654, um amigo de Pascal, De Méré, um culto homem de letras mas inveterado jogador, colocou-lhe um problema do jogo de dados. Pascal escreveu a Fermat sobre esta questão e daí resultou a troca de correspondência, ao todo oito cartas com os pensamentos conjugados de ambos, que marcaram o início da Teoria das Probabilidades como ciência.

Pierre Fermat (1601-1655), apesar da sua formação académica superior em Direito, teve uma actividade importante na área da Matemática, sendo reconhecido como o maior matemático francês do século XVII. Foram muito importantes as suas contribuições na área do Cálculo, na Lei da Refracção e na Teoria dos Números, para além de outros contributos não menos importantes, como no despontar da Teoria das Probabilidades que ajudou a estabelecer com Pascal. Contudo, apesar de todo este meritório trabalho, a influência de Fermat não correspondeu às suas extraordinárias capacidades matemáticas pois sempre se mostrou avesso à publicação dos seus estudos e descobertas.

No século XVIII, o Cálculo das Probabilidades tornou-se um tema que despertou grande interesse em muitos investigadores matemáticos. **Jacob Bernoulli** (1654-1705) foi um matemático suíço que, entre outras obras de vulto, escreveu *Ars conjectandi - A arte de Conjecturar -*, um longo trabalho sobre a Teoria das Probabilidades. Nesta obra, Bernoulli desenvolveu a “Lei dos grandes números” (Teorema de Bernoulli), resolveu diversos problemas de probabilidades e abordou combinações, permutações e a distribuição binomial.



Na segunda metade do século XVIII, o notável matemático francês **Pierre Laplace** (1749-1827) publicou um significativo número de trabalhos na área da Teoria das Probabilidades. Laplace notabilizou-se particularmente nos seus estudos sobre astronomia e pela publicação da sua obra em cinco volumes *Tratado de Mecânica Celeste*. Em 1812, publicou a *Teoria Analítica das Probabilidades* e em 1814 escreveu o *Ensaio Filosófico sobre a Probabilidade*, obras que deram um impulso muito inovador sobre tudo o que havia sido desenvolvido nesta área da Matemática durante o século XVIII. A Laplace fica a dever-se a definição clássica de probabilidade, conhecida como lei de Laplace.



Já durante o século XIX, o interesse pelo desenvolvimento do Cálculo de Probabilidades fez surgir, um pouco por todo o mundo, trabalhos e estudos sobre este tema. Após a obra de Laplace que sem dúvida constituiu um marco importante no domínio da Teoria das Probabilidades, na Alemanha nasceu um extraordinário matemático, **Carl Gauss** (1777-1855), que, durante a sua vida, produziu notáveis trabalhos nas áreas da Física, da Matemática e da Astronomia. Gauss, desde muito jovem, mostrou uma enorme capacidade para as Matemáticas e, apenas com 22 anos, em 1799, obteve o grau de doutor na Universidade de Göttinger. A sua obra *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), em que é um tratado sobre a teoria dos números, é um clássico no campo das Matemáticas. No domínio da Teoria das Probabilidades, Gauss desenvolveu o método dos mínimos quadrados e as leis fundamentais da distribuição das probabilidades. Hoje em dia, o diagrama normal da probabilidade chama-se curva de Gauss.

Quase na mesma época de Gauss, o matemático francês **Denis Poisson** (1781-1840), professor de Matemática Pura na Faculdade de Ciências de Paris, publicou, em 1837, um importante trabalho sobre a distribuição de probabilidades – hoje conhecida como lei de Distribuição de Poisson –, dando deste modo mais um contributo importante para o desenvolvimento do ramo da Matemática.

Não foi, entretanto, senão no século XX que se desenvolveu uma teoria matemática rigorosa, baseada em axiomas, definições e teoremas. **Andrey Kolmogorov** propôs uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidades [9], [11].

Capítulo 1

Introdução ao Cálculo de Probabilidades

1.1 Experiência aleatória. Espaço de resultados. A contecimentos.

A teoria das probabilidades ocupa-se do estudo das leis que regem os fenómenos cujo resultado depende do acaso, isto é, fenómenos aleatórios, desde que sejam repetidas sob as mesmas condições, e não dos fenómenos físicos com leis deterministas, pois nestes já se conhece o resultado mesmo antes da sua realização [3].

Definição 1.1.1 (Experiência aleatória) – Chamamos experiência aleatória a uma experiência cujo resultado, apesar de se encontrar entre um conjunto de resultados conhecidos à partida, é incerto, ainda que a mesma seja realizada inúmeras vezes em condições idênticas.

Exemplo 1.1.1:

Considerar a experiência:

Lançar ao ar uma moeda equilibrada e verificar qual das faces fica voltada para cima. O que se pode dizer relativamente à previsão do resultado desta experiência?

Não podemos afirmar qual das faces da moeda fica voltada para cima antes de termos efectuado a experiência.

O cálculo das Probabilidades em experiências aleatórias é hoje um potente ramo da Matemática, sendo uma teoria complexa, com os seus axiomas, definições e teoremas. Por agora, vamos apresentar alguns conceitos básicos:

Definição 1.1.2 (Espaço de resultados ou conjunto de resultados ou espaço amostral) – Chamamos espaço de resultados ou conjunto de resultados ou espaço amostral, S, ao conjunto de todos os resultados possíveis, associados a uma experiência aleatória.

Exemplo 1.1.2:

Considerar a experiência:

Lançar um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registar o número da face que fica voltada para cima.

O conjunto de todos os resultados possíveis associados a esta experiência é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Definição 1.1.3 (Acontecimento) – Chamamos acontecimento a qualquer subconjunto do espaço de resultados, incluindo o vazio, $\emptyset$, e o próprio espaço de resultados, *S*.

Definição 1.1.4 (Acontecimento elementar) – Chamamos acontecimento elementar, a todo o acontecimento que é representado por um subconjunto de *S*, com um só elemento.

Definição 1.1.5 (Acontecimento composto) – Chamamos acontecimento composto, a todo o acontecimento que é representado por um subconjunto de *S*, constituído por mais do que um elemento.

Definição 1.1.6 (Acontecimento certo) – Chamamos acontecimento certo, a todo o acontecimento que coincide com todos os elementos do espaço de resultados.

Definição 1.1.7 (Acontecimento impossível) – Chamamos acontecimento impossível, àquele que nunca ocorre, correspondendo ao conjunto vazio.

Exemplo 1.1.3:

Considerar, novamente, a experiência:

Lançar um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registar o número da face que fica voltada para cima.

O conjunto de todos os resultados possíveis associados a esta experiência é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

O acontecimento *A*: “Sair um número menor que 2”, ou seja, $A = \{1\}$ é um acontecimento elementar.

O acontecimento *B*: “Sair um número ímpar”, ou seja, $B = \{1, 3, 5\}$ é um acontecimento composto.

O acontecimento *C*: “Sair um número menor que 7”, ou seja, $C = \{1,2,3,4,5,6\}$ é um acontecimento certo.

O acontecimento *D*: “Sair um número maior que 6”, ou seja, $D = \emptyset$ é um acontecimento impossível.

1.2 Operações com acontecimentos. Acontecimentos incompatíveis e acontecimentos contrários.

Dado que os acontecimentos são representados por subconjuntos de *S*, é natural que importantes relações entre os acontecimentos possam ser consideradas como base na Teoria de Conjuntos. Em particular, se *A* e *B* são acontecimentos associados ao universo *S*, parece razoável considerar os conjuntos reunião, intersecção e complementar como representações também de acontecimentos associados a *S* [3], [15].

Definição 1.2.1 (Reunião) – Chamamos reunião, $A \cup B$, dos acontecimentos *A* e *B* ao acontecimento que se realiza quando *A* ou *B* (ou ambos) se realizam.

Definição 1.2.2 (Intersecção) – Chamamos intersecção, $A \cap B$, dos acontecimentos *A* e *B* ao acontecimento que se realiza quando *A* e *B* se realizam simultaneamente.

Definição 1.2.3 (Acontecimentos incompatíveis ou acontecimentos disjuntos) – Chamamos acontecimentos incompatíveis ou acontecimentos disjuntos a dois acontecimentos *A* e *B* de um espaço de resultados, S, se não tiverem elementos comuns. Assim, *A* e *B* são incompatíveis se e só se $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.2.4 (Acontecimentos contrários ou acontecimentos complementares) – Chamamos acontecimentos contrários ou acontecimentos complementares a dois acontecimentos A e $\bar{A}$ de um espaço de resultados, S, se forem incompatíveis e a sua reunião for um acontecimento certo.

Assim, A e $\bar{A}$ são contrários se e só se $A \cap \bar{A} = \emptyset$ e $A \cup \bar{A} = S$.

Observações:

1) Dois acontecimentos contrários são necessariamente incompatíveis.
2) Dois acontecimentos incompatíveis podem, ou não, ser contrários.

Exemplo 1.2.1:

Considerar, novamente, a experiência:

Lançar um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registar o número da face que fica voltada para cima.

O acontecimento A: “Sair um número primo”, ou seja, $A = \{2,3,5\}$.

O acontecimento B: “Sair um número divisível por 4”, ou seja, $B = \{1, 4\}$.

O acontecimento C: “Sair um número ímpar”, ou seja, $C = \{1, 3,5\}$.

O acontecimento D: “Sair um número par”, ou seja, $D = \{2, 4,6\}$.

Os acontecimentos A e B são **incompatíveis**, pois não há números primos divisíveis por 4.

Os acontecimentos C e D são **contrários**, pois ou sai número ímpar ou sai número par.

1.3 Teoria frequencista da probabilidade. Lei dos grandes números.

A interpretação frequencista foi adoptada de forma quase unânime durante a primeira metade do século XX e é, ainda hoje, a interpretação dominante. A ideia fundamental que lhe está subjacente é que a probabilidade de um acontecimento pode ser avaliada ou estimada observando a frequência relativa do mesmo acontecimento numa sucessão numerosa de provas ou experiências idênticas e independentes [7], [8].

Definição 1.3.1 (Lei dos grandes números ou definição frequencista de probabilidade) – A probabilidade de um acontecimento associado a uma experiência aleatória, é a frequência relativa esperada desse acontecimento, ou seja, o quociente entre o número de vezes que o acontecimento se realiza ao fim de *n* repetições da experiência e o número, *n*, de repetições.

De acordo com a teoria frequencista, a probabilidade de um acontecimento é então a frequência relativa estimada para esse acontecimento, quando o número de vezes que se realiza a experiência é muito elevado.

Exemplo 1.3.1:

Um dado, que se suspeitava ser viciado, foi lançado ao ar 1000 vezes. O número de vezes que saiu cada uma das faces bem como a correspondente frequência relativa, em percentagem com aproximação às unidades, foram registados na seguinte tabela:

Número de pintas da face	1	2	3	4	5	6
Frequência absoluta	143	152	146	156	149	254
Frequência relativa	0,14	0,15	0,15	0,16	0,15	0,25

A probabilidade, por exemplo, de sair face seis é de aproximadamente 0,25.

1.4 Definição clássica de probabilidade ou Lei de Laplace.

Uma outra definição de **Probabilidade** é dada pela **Lei de Laplace**, mas esta definição só pode ser aplicada quando os acontecimentos elementares são igualmente prováveis (equiprováveis) [1].

Definição 1.4.1 (Lei de Laplace) – A probabilidade de um acontecimento A associado a uma certa experiência aleatória é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis.

Ou seja: $P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao acontecimento A}}{\text{número de casos possíveis}}$

Exemplo 1.4.1:

Considerar, novamente, a experiência:

Lançar um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registar o número da face que fica voltada para cima.

O acontecimento A: "Sair um número primo", ou seja, $A = \{2,3,5\}$.

De entre os seis acontecimentos elementares possíveis: {1}, {2}, {3}, {4}, {5} e {6}, os favoráveis ao acontecimentos A são {2}, {3} e {5}, ou seja três casos. Assim, aplicando a Lei de Laplace, visto que os acontecimentos são equiprováveis, temos:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1.5 Definição axiomática de probabilidade.

A teoria frequencista e a lei de Laplace são modelos de probabilidade que nos permitem obter a probabilidade de acontecimentos de certas situações.

A primeira definição formal de probabilidade foi concedida pelo matemático russo Andrey Kolmogorov. Essa definição permitiu fazer uma construção axiomática geral para a Teoria das Probabilidades. A obra de Kolmogorov, que tem por base a Teoria dos Conjuntos e as propriedades das frequências relativas, foi dada a conhecer a todo o mundo científico pela tradução inglesa "Foundations of the Theory of Probability" em 1950 e, a partir de então, a Teoria das Probabilidades não parou de ganhar importância [3], [10], [13].

Considere-se uma experiência aleatória e o respectivo espaço de resultados S:

Axioma 1.5.1 – A probabilidade de um acontecimento A é um número não negativo, ou seja, $P(A) \geq 0$.

Axioma 1.5.2 – A probabilidade de um acontecimento certo é 1, ou seja, $P(S) = 1$.

Axioma 1.5.3 – A probabilidade da reunião de dois acontecimentos incompatíveis é igual à soma das probabilidades desses acontecimentos, ou seja, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ se $A \cap B = \emptyset$.

A partir destes axiomas, vamos demonstrar alguns teoremas muito importantes para o cálculo das probabilidades.

Teorema 1.5.1 – Sendo A uma acontecimento qualquer, a probabilidade do acontecimento contrário de A, que se representa por $P(\bar{A})$, é dada por:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Hipótese: O acontecimento $\bar{A}$ é contrário de A.

Tese: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Demonstração:

Como os acontecimentos A e $\bar{A}$ são incompatíveis, temos que:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}), \text{ pelo axioma 3.}$$

Por hipótese, o acontecimento $\bar{A}$ é o acontecimento contrário de A, logo, $A \cup \bar{A} = S$ e $P(S) = 1$, pelo axioma 2.

Como consequência, podemos escrever que:

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Leftrightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

■

Teorema 1.5.2 – A probabilidade do acontecimento impossível é zero.

Hipótese: Seja $\emptyset$ o acontecimento impossível.

Tese: $P(\emptyset) = 0$.

Demonstração:

O acontecimento contrário de um acontecimento impossível é um acontecimento certo, então $P(\emptyset \cup S) = P(\emptyset) + P(S)$, pelo axioma 3, mas:

$$P(\emptyset \cup S) = P(S) \Leftrightarrow P(\emptyset) + P(S) = P(S) \Leftrightarrow P(\emptyset) + 1 = 1 \Leftrightarrow P(\emptyset) = 0$$

pois, pelo axioma 2, $P(S) = 1$.

■

Teorema 1.5.3 – Qualquer que seja o acontecimento A, temos que:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Hipótese: A é um acontecimento qualquer.

Tese: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Demonstração:

Pelo axioma 1, $P(A) \geq 0$ e, pelo axioma 2, $P(S) = 1$.

Como $A \subset S$, podemos concluir que:

$$P(A) \leq P(S) \Leftrightarrow P(A) \leq 1,$$

ou seja,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

■

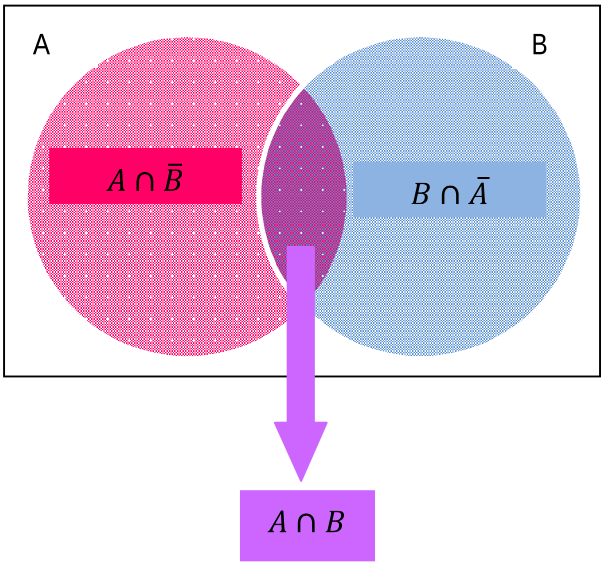
Teorema 1.5.4 – Dados dois acontecimentos quaisquer, A e B:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Hipótese: A e B são dois acontecimentos quaisquer.

Tese: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demonstração:



Observando o diagrama temos que:

$$A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \text{ e } B = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$$

Pelo axioma 3, vem:

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \text{ e } P(B) = P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$$

Logo,

$$P(A) + P(B) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B)$$

Como:

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap B)$$

Pelo axioma 3, vem:

$$P(A \cap \bar{B}) + P(B \cap \bar{A}) + P(A \cap B) = P(A \cup B)$$

Então,

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

■

1.6 Probabilidade condicionada.

Ao resolver alguns problemas de cálculo de probabilidades, por vezes surge a necessidade de calcular a probabilidade de um acontecimento A, quando se dispõe de informações que vão condicionar a ocorrência de A [11].

O estudo sobre este conceito de probabilidade condicionada foi aprofundado pelos matemáticos Huygens e Jacob Bernoulli, mas as investigações mais significativas devem-se a De Moivre [5].

Definição 1.6.1 (Probabilidade condicionada) – Chamamos probabilidade de A condicionada por B, à probabilidade de ocorrer A sabendo que ocorreu B e representa-se por:

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ com $P(B) \neq 0$.

Exemplo 1.6.1:

Considere-se, novamente, a experiência:

Lançar um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, e registar o número da face que fica voltada para cima, e Suponhamos que dispomos da informação de que ao lançar o dado o número da face que fica voltada para cima é par, ou seja, realizou-se o acontecimento: $B = \{2, 4, 6\}$.

Qual será a probabilidade de sair face com um número superior a 5?

Sejam:

Acontecimento B: “Sair um número par”, ou seja, $B = \{2, 4, 6\}$ e

Acontecimento A: “Sair um número superior a 5”, ou seja, $A = \{6\}$.

A probabilidade de sair um número superior a 5, sabendo que saiu um número par é dado por:

$P(\,A \mid B\,) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$

Facilmente se verifica que a probabilidade condicionada é uma medida de probabilidade, já que verifica os axiomas apresentados. Além disso, a probabilidade condicionada pode interpretar-se como uma reavaliação da probabilidade de um acontecimento quando se tem a informação de que outro acontecimento se realizou. Uma vez conhecida a realização desse outro acontecimento, B, o espaço de resultados deixa de ser S e passa a ser B. Deste modo, o acontecimento A só se realiza quando se realiza $A \cap B$ [9].

1.7 Regra da Multiplicação

Uma consequência imediata da probabilidade condicionada é a regra da multiplicação das probabilidades, a qual expressa a probabilidade da intersecção em termos de probabilidade individual dos acontecimentos e da probabilidade condicionada. Assim, podemos ainda afirmar que:

$P(A \cap B) = P(\,A \mid B\,) \times P(B)$ se $P(B) \neq 0$ e

$P(B \cap A) = P(\,B \mid A\,) \times P(A)$ se $P(A) \neq 0$.

1.8 A contecimentos independentes.

Dois acontecimentos A e B dizem-se independentes se a ocorrência de um deles não altera a probabilidade de o outro ocorrer.

Definição 1.8.1 (Acontecimentos independentes) – Chamamos acontecimentos independentes, a dois acontecimentos A e B, se e só se, $P(A \mid B) = P(A)$ ou $P(B \mid A) = P(B)$.

Desta definição resulta o seguinte:

Teorema 1.8.1 – Sendo A e B dois acontecimentos independentes, tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Hipótese: A e B são acontecimentos independentes.

Tese: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Demonstração:

Temos que:

$P(A \mid B) = P(A)$, pela definição de acontecimentos independentes e,

$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, pela definição de probabilidade condicionada.

Então:

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

∎

Observações:

1) O acontecimento impossível é independente de qualquer outro.
2) Dados dois acontecimentos, A e B, em que nenhum deles é impossível, se A e B são incompatíveis, então não são independentes.

Exemplo 1.8.1:

No lançamento de um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6, considere-se os seguintes acontecimentos:

A: " sair número par"; B: " sair número superior a 2"; C: " sair número múltiplo de 3".

Estude-se a independência entre estes acontecimentos, comparando a probabilidade da intersecção com o produto das probabilidades.

Tem-se $A = \{2,4,6\}$; $B = \{3,4,5,6\}$; $C = \{3,6\}$; $A \cap B = \{4,6\}$; $A \cap C = \{6\}$ e $B \cap C = \{3,6\}$;

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ $P(B \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Como $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ e $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$,

tem-se que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, logo A e B são independentes.

Como $P(A \cap C) = \frac{1}{6}$ e $P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$,

tem-se que $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$, logo A e C são independentes.

Como $P(B \cap C) = \frac{1}{3}$ e $P(B) \times P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$,

tem-se que $P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$, logo B e C não são independentes.

1.9 Verificação de que a probabilidade condicionada satisfaz a axiomática de Kolmogorov.

Considere os acontecimentos A e B, tais que $A \subset S$ e $B \subset S$, sendo S um espaço de resultados associado a uma experiência aleatória e $P(B) > 0$.

Prove-se que $P(A|B)$ verifica os três axiomas dados:

Teorema 1.9.1 – $P(A|B) \geq 0$

Hipótese: A e B são dois acontecimentos e $P(B) > 0$.

Tese: $P(A|B) \geq 0$.

Demonstração:

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ e $P(A \cap B) \geq 0$, pelo axioma 1 e $P(B) > 0$.

Logo $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0 \Leftrightarrow P(A|B) \geq 0$.

∎

Teorema 1.9.2 – $P(S|B) = 1$

Hipótese: S é o acontecimento certo e $P(B) > 0$.

Tese: $P(S|B) = 1$.

Demonstração:

$P(S|B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, pois $S \cap B = B$.

∎

Teorema 1.9.3 – Se A e C são acontecimentos incompatíveis e $P(B) > 0$ então $P\big((A \cup C)\big|B\big) = P(A|B) + P(C|B)$.

Hipótese: A e C são acontecimentos incompatíveis e $P(B) > 0$

Tese: $P\big((A \cup C)\big|B\big) = P(A|B) + P(C|B)$.

Demonstração:

$$P\big((A \cup C)\big|B\big) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (C \cap B))}{P(B)} = \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = P(A|B) + P(C|B)$$

Nota: $P\big((A \cap B) \cup (C \cap B)\big) = P(A \cap B) + P(C \cap B)$, pelo axioma 3.

∎

Capítulo 2

Análise Combinatória

A análise combinatória é uma área de grande importância no estudo das probabilidades e da estatística. Muitas vezes pretende-se estimar a incerteza associada e um acontecimento, o que quase sempre implica contabilizar o número de casos favoráveis à realização desse acontecimento. Os métodos ou técnicas de contagem permitem a obtenção de contagens com relativa facilidade, mesmo nos casos que manualmente são muito morosos e de difícil contabilização [3], [4], [15].

Definição 2.0.1 (Sequência ou sucessão) – Chamamos sequência ou sucessão a um conjunto de elementos que estão por uma determinada ordem.

A partir de uma dada sequência inicial obtém-se outra trocando a ordem de pelo menos dois elementos da sequência inicial.

O processo de cálculo do número de sequências que é possível formar vai depender de dois factores:

- A ordem dos seus elementos,
- A repetição ou não dos seus elementos.

Casos em que na contagem interessa a ordem:

- Permutações,
- Arranjos sem repetição,
- Arranjos com repetição.

Casos em que não interessa a ordem:

- Combinações.

2.1 Factorial de um número. Permutações.

Definição 2.1.1 (Factorial) – Chamamos factorial de um número natural n e representa-se por *n!*, ao produto: $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

Exemplos 2.1.1:

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$

$1! = 1$

$0! = 1$, por convenção.

Definição 2.1.2 (Permutação) – Chamamos permutação de n elementos a todas as sequências diferentes que é possível obter com os n elementos.
Representa-se por P_n o número de permutações com n elementos e tem-se: $P_n = n!$.

Exemplo 2.1.2:
De quantas maneiras é que a Ana, a Bárbara, a Catarina e a Diana se podem sentar dentro de um automóvel, com quatro lugares, indo duas à frente e duas atrás e supondo que qualquer uma pode conduzir?

Existem quatro lugares no automóvel: o do condutor, o lugar ao lado, o lugar atrás do condutor e o outro lugar. Qualquer uma das raparigas se pode sentar em qualquer lugar. No primeiro lugar pode começar por se sentar qualquer uma das quatro, depois no lugar do lado qualquer uma das três e assim sucessivamente. Assim o número de sequências de quatro pessoas num automóvel de quatro lugares é:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

No final da viagem, as quatro raparigas resolvem almoçar juntas. De quantas formas diferentes se podem sentar à volta de uma mesa redonda, sem lugares marcados?

Quando os elementos estão dispostos de forma circular, chamamos permutação circular de n elementos a todas as sequências diferentes que é possível obter com os n elementos. Duas permutações circulares são consideradas idênticas se, e somente se, quando se percorre a circunferência a partir de um mesmo elemento das duas permutações, se encontram elementos que formem sequências iguais [10].

Como resposta à pergunta tem-se então que, numa mesa redonda, o número de formas diferentes das quatro raparigas se sentarem é: $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (é necessário fixar sempre um lugar), pois se todos os elementos trocassem de lugar, sem fixar um deles, ir-se-ia considerar sequências iguais.

2.2 Arranjos sem repetição. Arranjos com repetição. Combinações.

Definição 2.2.1 (Arranjos sem repetição) – Chamamos arranjos sem repetição de n elementos, a todas as sequências que é possível obter com p elementos escolhidos arbitrariamente com os n elementos.

Representa-se por:

$$^{n}A_{p} = \frac{n!}{(n-p)!} \ .$$

Observação:

1) Quando $n = p$, temos que $^{n}A_{p} = P_n$.

Exemplo 2.2.1:

Quantos códigos diferentes de quatro algarismos diferentes se podem formar, com os algarismos de zero a nove?

Temos os algarismos de 0 a 9 (10 algarismos), logo $n = 10$. Pretende-se formar códigos com quatro algarismos, logo $p = 4$. Como no código não podem aparecer algarismos repetidos, utilizam-se arranjos sem repetição:

$$^{10}A_{4} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 5040 \ .$$

Definição 2.2.2 (Arranjos com repetição) – Chamamos arranjos com repetição de n elementos p a p a todas as sequências de p elementos, sendo estes diferentes ou não, que se podem formar com os n elementos

Representa-se por:

$$^{n}A'_{p} = n^{p}.$$

Exemplo 2.2.2:

Quantos códigos diferentes de quatro algarismos se podem formar, com os algarismos de zero a nove?

Temos os algarismos de 0 a 9 (10 algarismos), logo $n = 10$. Pretende-se formar códigos com quatro algarismos, logo $p = 4$. Utilizam-se, agora, arranjos com repetição, uma vez que podem existir algarismos iguais no código.

$$^{10}A'_{4} = 10^{4} = 1000.$$

Definição 2.2.3 (Combinações) – Chamamos combinações sem repetição de n elementos p a p ao número de subconjuntos com p elementos, que se podem formar num conjunto de n elementos.

Representa-se por:

$$^{n}C_{p} = \frac{n!}{p! \times (n-p)!}.$$

Observação:

1) A diferença entre as combinações e os arranjos sem repetição é que nas combinações não interessa a ordem.

Exemplo 2.2.3:

Um hospital precisa de contratar dois médicos e três enfermeiros entre doze candidatos, dos quais quatro são médicos e oito são enfermeiros. De quantas maneiras distintas o pode fazer?

O número de maneiras de escolher os dois médicos a partir dos quatro existentes é dada por:

$$^{4}C_{2}=\frac{4!}{2!\times(4-2)!}=\frac{4!}{2!\times2!}=6.$$

O número de maneiras de escolher os três enfermeiros a partir dos oito existentes é dada por:

$$^{8}C_{3}=\frac{8!}{3!\times(8-3)!}=\frac{8!}{3!\times5!}=56.$$

Assumindo que as duas escolhas são efectuadas de forma independente, o número de maneiras de escolher dois médicos e três enfermeiros é $6\times56=336$.

Notas:

Para aplicar a estratégia mais adequada na resolução de um problema de Análise Combinatória, ajuda seguir os seguintes passos:

1. Escrever o conjunto dos elementos que nos permitem construir as sequências.
2. Escrever algumas sequências das que pretendemos contar.
3. Alterar a ordem de uma determinada sequência e de acordo com o conteúdo do problema, verificar se a nova sequência é igual, ou diferente, da que se tinha anteriormente.
4. Descobrir se os elementos se repetem, ou não.

2.3 O Triângulo de Pascal.

O Triângulo de Pascal ou triângulo de Tartaglia é um triângulo numérico infinito definido a partir do número 1 e através de somas sucessivas. Existem indícios do aparecimento desse triângulo 2000 anos antes do nascimento de Pascal, no entanto, o triângulo leva o seu nome pela sua maior contribuição no estudo das suas propriedades [1], [14].

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm diversas relações entre si. Muitas dessas relações foram descobertas pelo próprio Pascal, o que justifica o nome que lhe é dado.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

...

Observação:

1) Considera-se que o topo do triângulo corresponde à linha 0, coluna 0.

Propriedade 2.3.1 – O primeiro elemento e o último de cada linha têm valor 1, ou seja, ${}^{n}C_{0} = {}^{n}C_{n} = 1, \forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

Propriedade 2.3.2 – O triângulo de Pascal tem um "eixo de simetria", ou seja, os termos equidistantes dos extremos de cada linha são iguais, ou seja em linguagem matemática, ${}^{n}C_{p} = {}^{n}C_{n-p}$ com n, $p \in N_0$, $n \geq p$.

Propriedade 2.3.3 – Adicionando dois números consecutivos de uma linha do triângulo de Pascal, obtemos o número que, na linha seguinte, ocupa a posição entre aqueles dois. Como exemplo podemos dizer que: 10=4+6 (10-linha 5; 4 e 6-linha 4).
Ou seja,

$${}^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$$

sendo n o número de linhas e p o número de colunas dessa linha e $0 \leq p < n$, $p \in N_0$, $n \in N$.

Demonstração:

$${}^{n}C_{p} + {}^{n}C_{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)![n-(p+1)]!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{p!(p+1)(n-p-1)!} = \frac{n!(p+1)+n!(n-p)}{p!(p+1)(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!(p+1+n-p)}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = {}^{n+1}C_{p+1}$$

■

Propriedade 2.3.4 – A soma dos elementos da n-ésima linha do triângulo é 2^n .

1	$\mathbf{2^0}$
1 1	$\mathbf{2^1}$
1 2 1	$\mathbf{2^2}$
1 3 3 1	$\mathbf{2^3}$
1 4 6 4 1	$\mathbf{2^4}$
1 5 10 10 5 1	$\mathbf{2^5}$
1 6 15 20 15 6 1	$\mathbf{2^6}$
1 7 21 35 35 21 7 1	$\mathbf{2^7}$
…	…

Ou seja,

Linha 0: $2^0 = 1$, qualquer potência de expoente zero é 1.

Linha 1: $2^1 = 2$

Linha 2: $2^2 = 4 = 1 + 2 + 1$

Linha 3: $2^3 = 8 = 1 + 3 + 3 + 1$

…

Propriedades 2.3.5 – Na segunda diagonal, estão os números naturais. Quando um deles for primo (isto é, apenas divisível por ele próprio e por 1) então todos os elementos dessa linha, excluindo o 1, são divisíveis por ele.

Temos como exemplo na linha 7:

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

como 7 é primo então 7, 21 e 35 são divisíveis por ele.

Propriedade 2.3.6 – No triângulo de Pascal, os algarismos de cada linha formam uma potência de base 11.

Linha 0: $11^0=1\times10^0=1$

Linha 1: $11^1=1\times10^1+1\times10^0=10+1=11$

Linha 2: $11^2=1\times10^2+2\times10^1+1\times10^0=100+20+1=121$

Linha 3: $11^3=1\times10^3+3\times10^2+3\times10^1+1\times10^0=1000+300+30+1=1331$

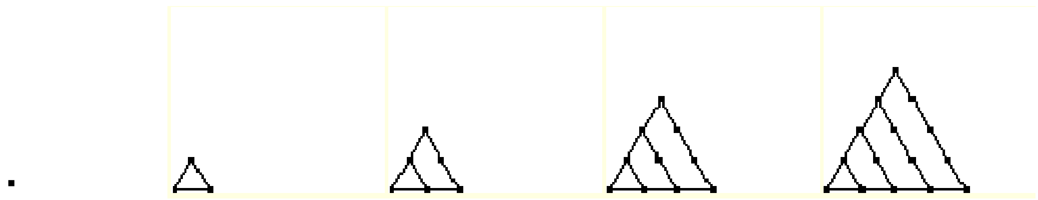
Linha 4: $11^4=1\times10^4+4\times10^3+6\times10^2+4\times10^1+1\times10^0=14641$

...

Concluímos assim que:

- a maior potência de cada soma corresponde à linha que estamos a considerar;
- os coeficientes das potências são os elementos da linha em questão;
- a potência de 11 corresponde à maior potência apresentada na soma, ou seja, o número da linha.

Propriedade 2.3.7 – Na 3ª diagonal encontram-se os números triangulares, estes pertencem à categoria dos números figurados (descobertos por matemáticos das escolas pitagóricas) pois podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes, neste caso triângulos como é exemplificado:



É de notar que estes números são alternadamente dois ímpares dois pares, podendo ser alcançados através de sucessões por recorrência através da fórmula

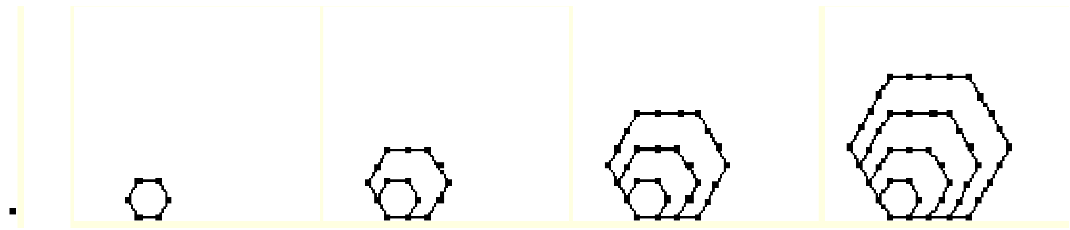
$$T(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

(a partir dos n-1 elementos conseguimos alcançar o elemento n).

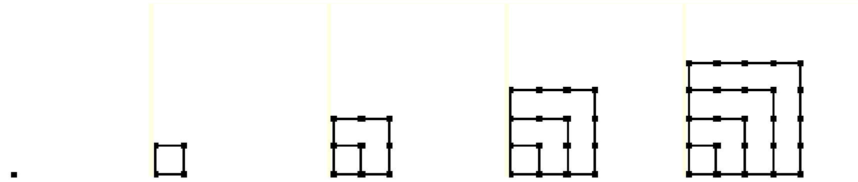
Como a partir dos números triangulares se podem obter os números hexagonais, visto que os números triangulares de ordem ímpar são números hexagonais e

$$H(n) = n(2n-1),$$

é possível vê-los aqui também:



A terceira diagonal, contém ainda os números quadrados, pois se somarmos o primeiro elemento ao segundo (1+3) obtemos o 4 que é um número quadrado, ao somarmos o segundo ao terceiro elemento (3+6) ficamos com o número 9, também ele um número quadrado, e assim por diante. Para além do que estamos habituados a fazer (a^2) podemos também representar estes números sobre a forma geométrica:



Na 4ª diagonal podemos observar mais alguns números figurados tais como os números tetraédricos (1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, ...). Estes, de acordo com os esquemas anteriores também representam formas geométricas, neste caso um tetraedro (pirâmide regular com base triangular).

Padrões:

Padrão 2.3.1 – Padrão do Stick de Hóquei

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

...

Neste padrão se se começar a diagonal a partir de um 1, nas margens do triângulo e acabar em qualquer número do triângulo nessa diagonal, a soma dos números dentro da selecção é igual a um número por baixo do final da selecção que não está na mesma diagonal.

Padrão 2.3.2 – Padrão da espiga

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

...

Considerando as diagonais do Triângulo. Pode-se verificar que a soma dos primeiros n elementos da n-ésima diagonal é igual ao (n+1)-ésimo elemento dessa mesma diagonal. É interessante observar que esses elementos das diagonais vão estar todos numa coluna.

2.4 Binómio de Newton.

O binómio de Newton é uma expressão que permite calcular o desenvolvimento de $(a + b)^n$, sendo $a + b$ um binómio e n um número natural qualquer.

A expressão que permite escrever o desenvolvimento de qualquer potência de uma expressão algébrica formada por dois termos (binómio) foi dada a conhecer pelo físico e matemático inglês Isaac Newton em 1676 e tem a forma:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2\times 1}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p-1)}{p\times\ldots\times 3\times 2\times 1}a^{n-p}b^p + \cdots + b^n$$

Sendo n um número natural, e esta expressão tem $n + 1$ termos.

De notar que, apesar do aspecto relativamente complexo da expressão, ela contém uma série de regularidades que a tornam simples de memorizar. Em primeiro lugar, em cada termo aparecem potências decrescentes de a (a^n, a^{n-1}, a^{n-2}, ..., a, $a^0 = 1$) e potências crescentes de b (b^0, b,..., b^{n-2}, b^{n-1}, b^n) de tal forma que a soma dos expoentes de a e de b é sempre igual a n. Em segundo lugar, os coeficientes que aparecem a multiplicar pelas referidas potências de a e de b correspondem às combinações de n, p a p, desde ${}^nC_0$ até ${}^nC_n$.

Para a determinação das combinações de n, p a p , utiliza-se a expressão:

$${}^nC_p = \frac{n!}{p!\times(n-p)!}\ .$$

Para obter as combinações de *n* referidas pode recorrer-se ao triângulo de Pascal que é formado precisamente por todas as combinações de *n* e que, atendendo às suas características, é de muito fácil utilização. De facto, para cada valor de *n*, temos:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Em que cada linha do triângulo corresponde, sucessivamente, a

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & {}^0C_0 & & & & & & & \\
 & & & & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & & & & & & \\
 & & & & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 & & & & & \\
 & & & & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 & & & & \\
 & & & {}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 & & & \\
 & & {}^5C_0 & & {}^5C_1 & & {}^5C_2 & & {}^5C_3 & & {}^5C_4 & & {}^5C_5 & & \\
 & {}^6C_0 & & {}^6C_1 & & {}^6C_2 & & {}^6C_3 & & {}^6C_4 & & {}^6C_5 & & {}^6C_6 & \\
{}^7C_0 & & {}^7C_1 & & {}^7C_2 & & {}^7C_3 & & {}^7C_4 & & {}^7C_5 & & {}^7C_6 & & {}^7C_7
\end{array}
$$

Assim, para um determinado valor de *n*, basta seleccionar a linha correspondente a esse *n* no triângulo de Pascal para encontrar todos os coeficientes do binómio de Newton.

Assim, a fórmula do Binómio de Newton pode ser escrita da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}^nC_p a^{n-p} b^p + \cdots + {}^nC_n b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k
\end{aligned}
$$

Demonstração do Teorema do Binómio de Newton (por indução):

A igualdade é válida para n=1, como é fácil verificar:

$$\begin{aligned}(a+b)^1 &= {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 a^{1-1} b^1 \\ &= 1 \times a^1 + 1 \times a^0 b^1 \\ &= a^1 + b^1 \\ &= a + b\end{aligned}$$

Suponhamos que é válida para n. Vamos mostrar que é válida para n+1.

Tem-se:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n$$

$$= (a+b) \times \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$$

$$= (a+b) \times \left({}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}^nC_p a^{n-p} b^p + \cdots + {}^nC_n b^n \right)$$

$$= {}^nC_0 a^{n+1} + {}^nC_0 b + {}^nC_1 a^n b^1 + {}^nC_1 a^{n-1} b^2 + {}^nC_2 a^{n-1} b^2 + {}^nC_2 a^{n-2} b^3 + \cdots + {}^nC_p a^{n-p+1} b^p + {}^nC_p a^{n-p} b^{p+1} + \cdots + {}^nC_n a b^n + {}^nC_n b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + a \sum_{k=1}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k + \mathrm{b} \sum_{k=0}^{n-1} {}^nC_k a^{n-k} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + a \sum_{k=1}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k + \mathrm{b} \sum_{k=1}^{n} {}^nC_{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} [\, {}^nC_k + {}^nC_{k-1}]\, a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} {}^{n+1}C_k\, a^{n-k+1} b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} {}^{n+1}C_k\, a^{n-k+1} b^k$$

■

Se designar-mos por T_{p+1}, o termo de ordem p+1 do desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$, $n \in N_0$, tem-se que:

$$T_{p+1} = {}^nC_p a^{n-p} b^p.$$

Exemplos de desenvolvimento de binómios de Newton :

a) $(a + b)^0 = 1$
b) $(a + b)^1 = a + b$
c) $(a + b)^2 = a^2 + 2a\,b + b^2$
d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2\,b + 3a\,b^2 + b^3$
e) $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3\,b + 6a^2\,b^2 + 4a\,b^3 + b^4$
f) $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4\,b + 10a^3\,b^2 + 10a^2\,b^3 + 5a\,b^4 + b^5$
...

Observações:

1) O desenvolvimento do binómio $(a + b)^n$ é um polinómio.

2) O desenvolvimento de $(a + b)^n$ possui n + 1 termos .

3) Os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos, no desenvolvimento de $(a + b)^n$ são iguais .

4) A soma dos coeficientes de $(a + b)^n$ é igual a 2n .

Exemplo 2.4.1:

Qual o desenvolvimento do binómio $(2x - 1)^5$, aplicando o Binómio de Newton?

$$\begin{aligned}(2x - 1)^5 &= {}^5C_0 \times (2x)^5 \times (-1)^0 + {}^5C_1 \times (2x)^4 \times (-1)^1 + {}^5C_2 \times (2x)^3 \times (-1)^2 + \\ &+ {}^5C_3 \times (2x)^2 \times (-1)^3 + {}^5C_4 \times (2x)^1 \times (-1)^4 + {}^5C_5 \times (2x)^0 \times (-1)^5 \\ &= 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1.\end{aligned}$$

Exemplo 2.4.2:

O 10.º termo do desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{3}\right)^{15}$ é:

$T_{10} = T_{9+1} = {}^{15}C_9\ (x^2)^{15-9}\left(\frac{1}{3}\right)^9 = 5005x^{12} \times \frac{1}{19683} = \frac{5005}{19683}x^{12}$.

Exemplo 2.4.3:

O termo médio do desenvolvimento do binómio $(3 - 4x)^{10}$ é:

Como $n=10$ o desenvolvimento tem 11 termos, logo o termo médio é o 6.º termo:

$T_6 = T_{5+1} = {}^{10}C_5\ 3^{10-5}(-4x)^5 = 252 \times 243 \times (-1024x^5) = -62705664x^5$.

Exemplo 2.4.4:

O termo independente de $\left(x + \frac{5}{x}\right)^6, x \neq 0$ é:

O termo independente de um desenvolvimento é o termo em que a parte literal tem expoente zero.

Determine-se o termo do desenvolvimento de $\left(x + \frac{5}{x}\right)^6$ que verifica a condição:

$T_{p+1} = {}^6C_p\ x^{6-p}\left(\frac{5}{x}\right)^p = {}^6C_p\ x^{6-p}5^p x^{-p} = {}^6C_p\ 5^p x^{6-2p}$, logo $6 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = 3$.

O termo é:

$T_{3+1} = T_4 = {}^6C_3\ 5^3 = 20 \times 125 = 2500$.

Exemplo 2.4.5:

O termo em x^{-4} do desenvolvimento de $\left(3x + \frac{1}{x}\right)^8$, $x \neq 0$ é:

O termo em x^{-4} é o termo em que a parte literal em x tem expoente -4.

$$T_{p+1} = {}^8C_p\ (3x)^{8-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^8C_p\ 3^{8-p}x^{8-p}x^{-p} = {}^8C_p\ 3^{8-p}x^{8-2p}.$$

Como o expoente em x é -4, $8 - 2p = -4 \Leftrightarrow$ p = 6, então o termo é:

$$T_7 = {}^8C_6\ 3^{8-6}x^{-4} = 252x^{-4}.$$

Capítulo 3

O uso da Calculadora nas Probabilidades e na Análise Combinatória

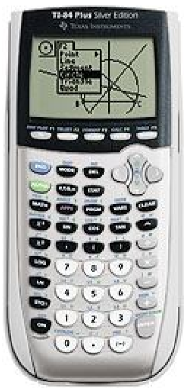
O uso da calculadora tem-se tornado comum no nosso quotidiano, no entanto a instituição escolar tem persistido, na melhor das hipóteses, em ignorar a sua existência, pois ainda chega a proibir o seu uso.

Muitas pessoas construíram significados que associam a calculadora à inibição do raciocínio ou à preguiça. Porém, ao explorarem este instrumento, os estudantes desenvolvem habilidades vinculadas ao cálculo mental, à decomposição e à estimativa, contradizendo os significados dados anteriormente.

Além disso, com a exploração da calculadora os alunos começam a lidar com problemas do dia-a-dia, tais como por exemplo a compra e venda de produtos, preparando-os para o mercado de trabalho, o qual exige, cada vez mais, trabalhadores capazes de operar com as novas tecnologias.

Usando a calculadora, o aluno pode concentrar a sua atenção no desenvolvimento de estratégias de resolução e na aquisição de conceitos, desligando-se de cálculos repetitivos e extensos. Esta deve funcionar como ferramenta para facilitar e agilizar os cálculos, permitindo que as atenções do aluno sejam mais destinadas à compreensão dos conceitos em questão ou à estratégia de resolução de problemas.

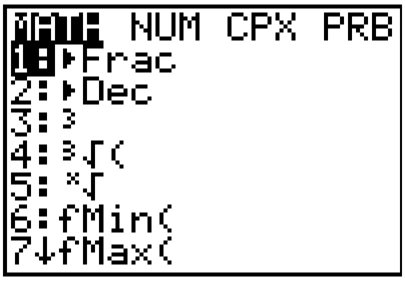
O uso da Calculadora Gráfica TI-84 Plus Silver Edition e suas potencialidades nas probabilidades e na análise combinatória:



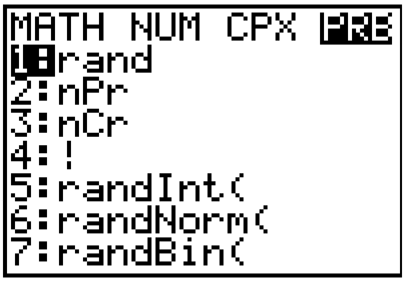
3.1 Lançamento de um dado.

Para simular 12 lançamentos de um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6, segue-se os seguintes passos:

Clicar na tecla MATH

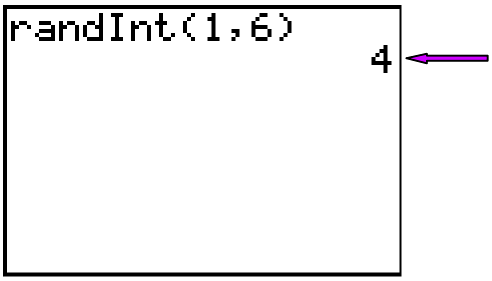


Escolher a opção PRB, clicar 3 vezes na tecla de direcção >

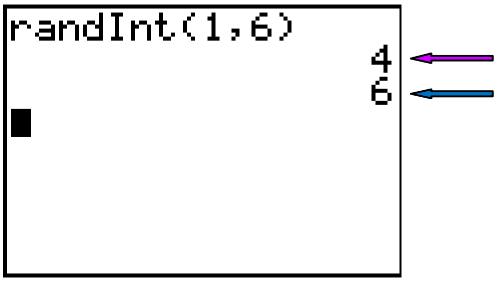


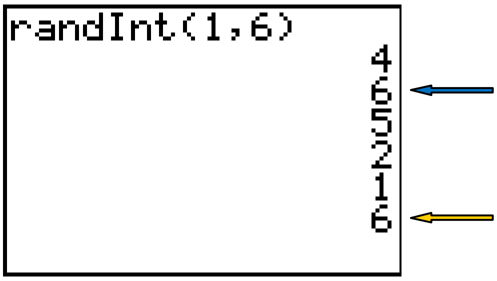
Clicar na tecla 5, seguido das teclas 1, ,, 6,)

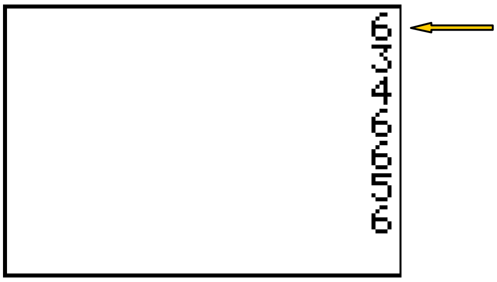
Clicar 2 vezes na tecla ENTER



Clicar na tecla ENTER, um número de vezes igual ao número de lançamentos que pretendemos.





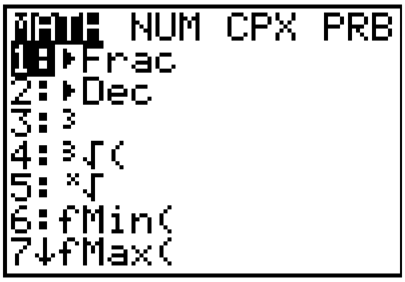


3.2 Factorial de um número. Permutações.

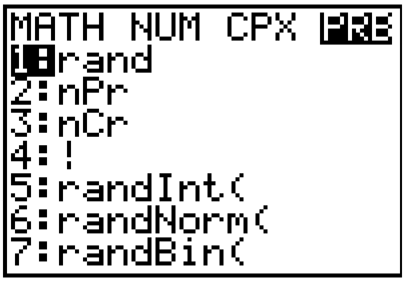
Para determinar o factorial de 6, ou seja, as permutações de 6 elementos segue-se os seguintes passos:

Clicar na tecla 6

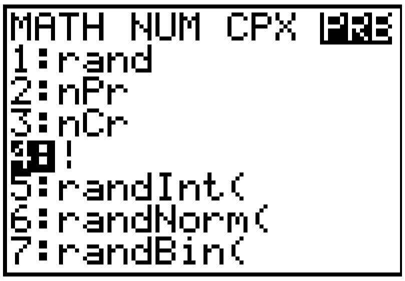
Clicar na tecla MATH



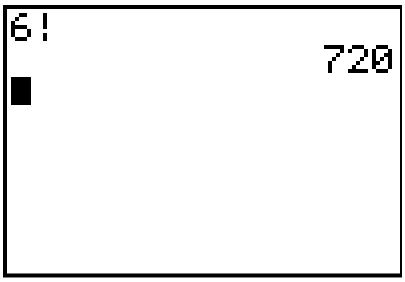
Escolher a opção PRB, clicar 3 vezes na tecla de direcção >



Clicar na tecla 4



Clicar na tecla ENTER



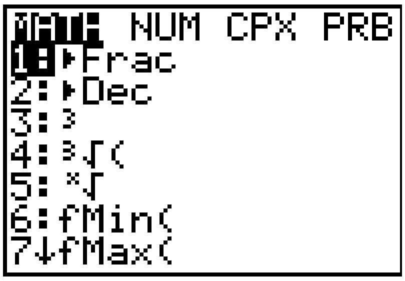
O resultado pretendido é: 6! = 720.

3.3 A rranjos sem repetição.

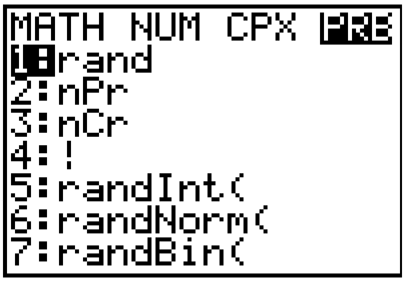
Para determinar ${}^{7}A_{2}$ seguem-se os seguintes passos:

Clicar na tecla **7**

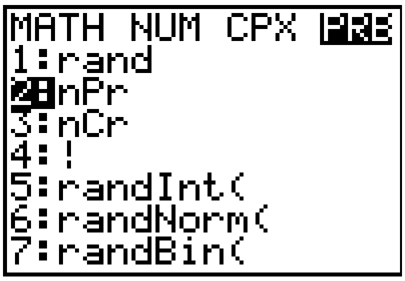
Clicar na tecla **MATH**



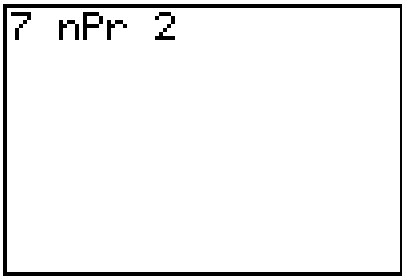
Escolher a opção PRB, clicar 3 vezes na tecla de direcção **>**



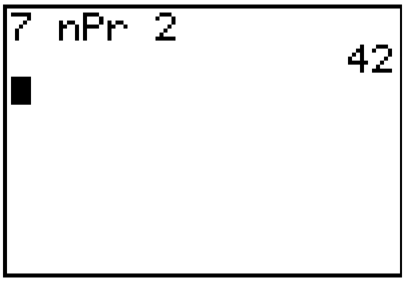
Clicar na tecla **2**



Clicar na tecla **2**



Clicar na tecla **ENTER**

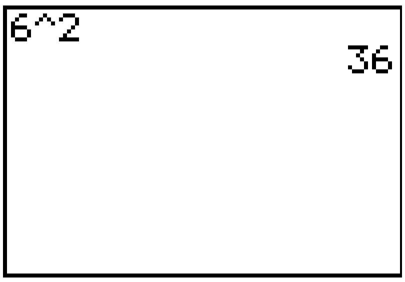


O resultado pretendido é: ${}^{7}A_{2}$ = 42.

3.4 A rranjos com repetição.

Para determinar ${}^{6}A'_{2}$ seguem-se os seguintes passos:

Clicar nas teclas **6** **^** **2** **ENTER**



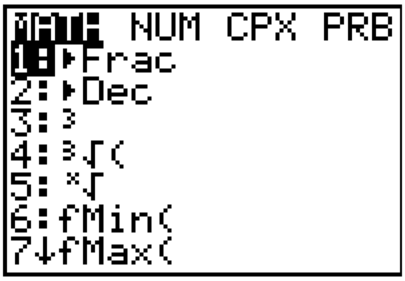
O resultado pretendido é: ${}^{6}A'_{2}$ = 36.

3.5 Combinações.

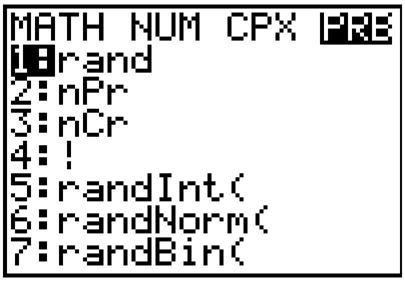
Para determinar ${}^{7}C_{2}$ seguem-se os seguintes passos:

Clicar na tecla 7

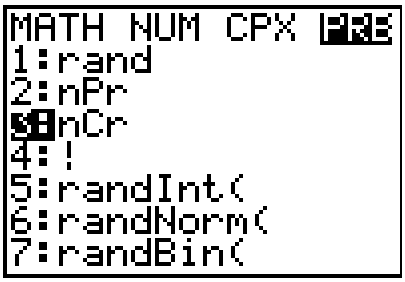
Clicar na tecla MATH

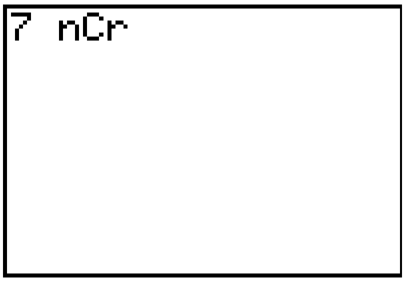


Escolher a opção PRB, clicar 3 vezes na tecla de direcção >

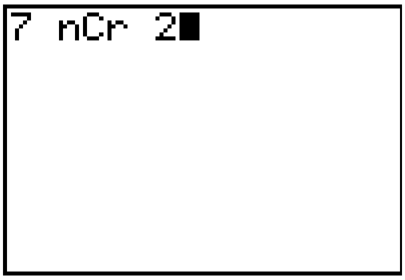


Clicar na tecla 3

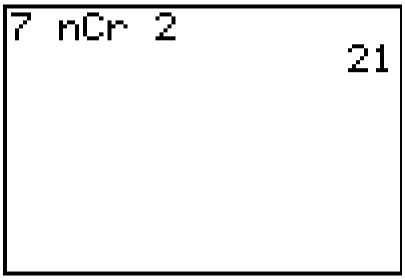




Clicar na tecla 2



Clicar na tecla ENTER

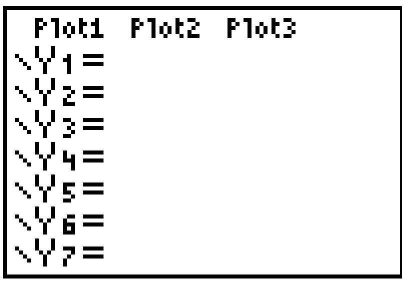


O resultado pretendido é: ${}^{7}C_{2}$ = 21.

3.6 Linha do Triângulo de Pascal.

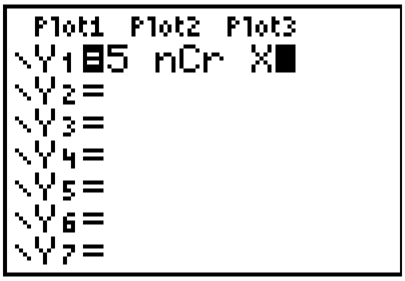
Para determinar uma certa linha do Triângulo de Pascal, seguem-se os seguintes passos:

Clicar na tecla Y=



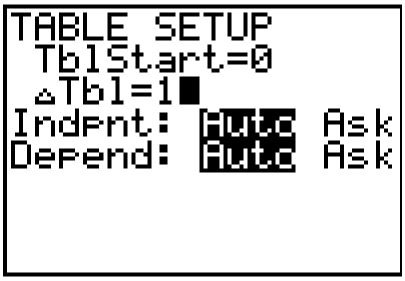
Inserir a expressão: ${}^{5}C_{x}$

Clicar na tecla **5**, inserir a expressão das combinações anteriormente apresentado e no final clicar na tecla **X,T,θ,n**

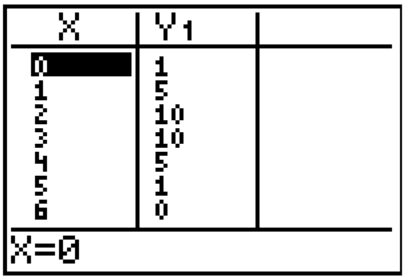


Configurar a tabela:

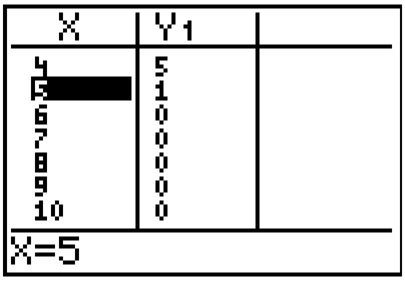
Clicar nas teclas **2ND** **WINDOW** (TBLSET)



Clicar nas teclas **2ND** **GRAPH** (TABLE)



Obtém-se assim, uma tabela com duas colunas. Na primeira coluna estão os índices inferiores da combinação a calcular e na segunda coluna os valores dessa mesma combinação.



Observação:

Com a tecla de direcção V, determina-se a última combinação que se consegue calcular. partir dessa ordem todos os restantes elementos da segunda coluna são nulos, como é óbvio.

Conclusão

A Teoria das Probabilidades é um Ramo da Matemática que visa a formulação de modelos teóricos, abstractos, para o tratamento matemático da ocorrência (ou não ocorrência) de fenómenos aleatórios; em termos sucintos, pode caracterizar-se como a Matemática do acaso, da incerteza. Esta teoria, por sua vez, está bastante relacionada com a Teoria de Conjuntos.

Apesar de no decorrer da minha licenciatura ter contactado com este ramo da Matemática, a escolha deste tema proporcionou-me uma certa curiosidade em certos conceitos tratados de forma superficial.

Através da pesquisa feita para a elaboração deste trabalho deparei-me com a riqueza de conceitos relacionados com a Teoria da Probabilidade, incluídos nos programas do Ensino Secundário de Matemática A e Matemática B.

O uso da calculadora nesta área, tal como em muitas outras, ajuda na execução de cálculos intermédios e de menor importância dando-se desta forma mais importância ao problema em si. Contudo, devemos desenvolver um raciocínio lógico e aplicar a matemática na vida real na solução de desafios práticos.

A elaboração do relatório de estágio para a obtenção do grau de Mestre no Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário foi uma mais-valia significativa, pois após um ano lectivo de pesquisa nesta área tenho presente novos conceitos e um melhor esclarecimento sobre conceitos já conhecidos.

Bibliografia

[1] Câmara, A. M.; (1993) *Matemática – Teoria e Prática (12.ºano – Volume 2)*. Lisboa: Edições Rumo.

[2] Costa, Belmiro; Rodrigues, Ermelinda; (2005) *Espaço B – Curso de Artes Visuais (Ano 2 – 11.º ou 12.º ano)*. Porto: Edições Asa.

[3] Gomes, Francelino; Viegas, Cristina; Lima, Yolanda; (2005) *Xeqmat (12.º Ano – Volume 1)*. Lisboa: Texto Editores.

[4] Gonçalves, Esmeralda; Lopes, Nazaré Mendes; (2000) *Probabilidades Princípios Teóricos*. Lisboa: Escolar Editora.

[5] Lipschutz, Seymour; (1972) *Matemática Finita*. São Paulo: McGraw Hill.

[6] Martins, M.ª Eugénia Graça; Monteiro, Cecília; Viana, José Paulo; Turkman, M.ª Antónia Amaral; (1998) *Probabilidades e Combinatória (12.º ano)*. Lisboa: Edição Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

[7] Neves, Maria Augusta Ferreira; Brito, M. L. C.; (1998) *Matemática (12.º ano – Volume 2)*. Porto: Porto Editora.

[8] Neves, Maria Augusta Ferreira; (2001) *Probabilidades - Matemática (12.º ano – Parte 1)*. Porto: Porto Editora.

[9] Neves, Maria Augusta Ferreira; Pereira, Albino; Leite, António; Guerreiro, Luís; Silva, M. Carlos; (2008) *Probabilidade – Matemática A7 (Ensino Profissional – Nível 3)*. Porto: Porto Editora.

[10] Neves, Maria Augusta Ferreira; Guerreiro, Luís; Moura, Ana; (2009) *Probabilidades – Matemática A (12.º ano)*. Porto: Porto Editora.

[11] Pestana, Dinis Duarte; Velosa, Sílvio Filipe; (2008) *Introdução à Probabilidade e à Estatística*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

[12] Programa – Ensino Secundário (Matemática A) – DGEBS.

[13] Santos, Fernando Borja; (2003) *Sebenta de Matemática – Cálculo das Probabilidades*. Lisboa: Plátano Editora.

[14] Spiegel, Murray R.; Shiller, John; Srinivasan, R. Alu; (2000) *Probabilidades e Estatística – Colecção Schaum*. São Paulo: McGraw Hill.

[15] Soveral, Ana Arede; Silva, Carmen Rocha; (2005) *Matemática A (12.º Ano – Volume 1)*. Lisboa: Texto Editores.

Webgrafia

http://www.infopedia.pt/$binomio-de-newton

http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_divertida/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal

http://pt.wikipedia.org/wiki/Bin%C3%B3mio_de_Newton

http://area.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/brochuras.htm

http://www.somatematica.com.br/probab.php

http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Genetica/leismendel9.php

http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Pascal

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/pasca_l/pascal.htm

http://www.edusurfa.pt/mostra_pdf/?pdf=Calculadora_probabilidades.pdf

http://www.matematicacauva.org/marcio/artigos/triangulo_pascal.pdf

http://www.portugaljovem.net/mariolima/matematica/temas/conteudos/probabilidades/index.htm